



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



# Metoda elementów skończonych (MES1)

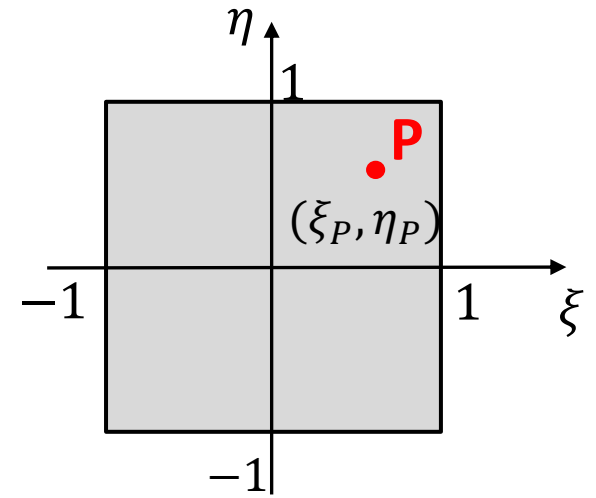
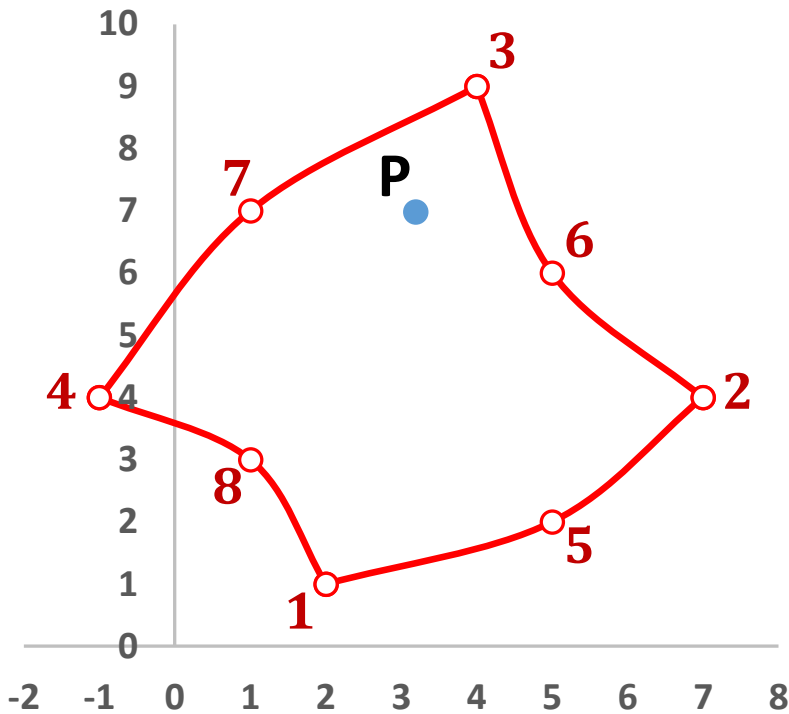
Wykład 4B. 8-węzłowy element czworokątny przykład

03.2024

# Przykład 1. Element 8-węzł. Znaleźć współrzędne i det [J] w punkcie P

współrzędne w układzie naturalnym:

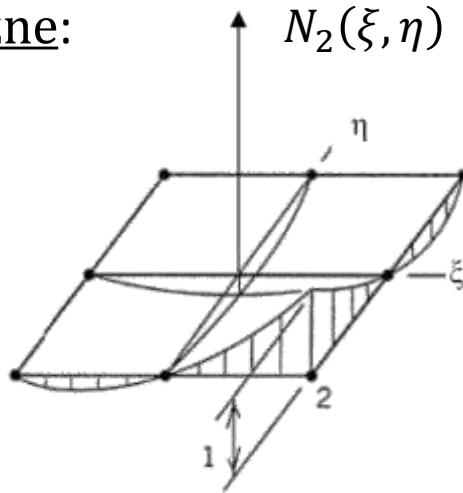
$$\xi_P = \eta_P = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\{x_i\}_e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_8 \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \{y_i\}_e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \end{Bmatrix}_{8 \times 1} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

## Funkcje kształtu 8-węzłowego elementu czworokątnego

węzły narożne:



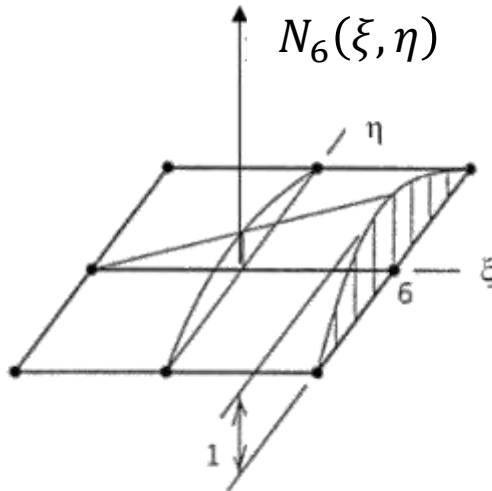
$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)$$

$$N_3(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)$$

$$N_4(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)$$

węzły w środku boków:



$$N_5(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

Przykładowa funkcja kształtu i jej pochodna dla węzła 1

$$N_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \frac{\partial [(1-\xi)(1+\xi+\eta)]}{\partial \xi} =$$

$$= -\frac{1}{4}(1-\eta) \left[ \frac{\partial (1-\xi)}{\partial \xi} (1+\xi+\eta) + \frac{\partial (1+\xi+\eta)}{\partial \xi} \cdot (1-\xi) \right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(1-\eta) \left[ -1 \cdot (1+\xi+\eta) + 1 \cdot (1-\xi) \right] =$$

$$= -\frac{1}{4}(1-\eta) [-1 - \xi - \eta + 1 - \xi] = -\frac{1}{4}(1-\eta) [-2\xi - \eta] =$$

$$= \frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi + \eta)$$

## Funkcje kształtu i ich pochodne dla elementu 8-węzłowego

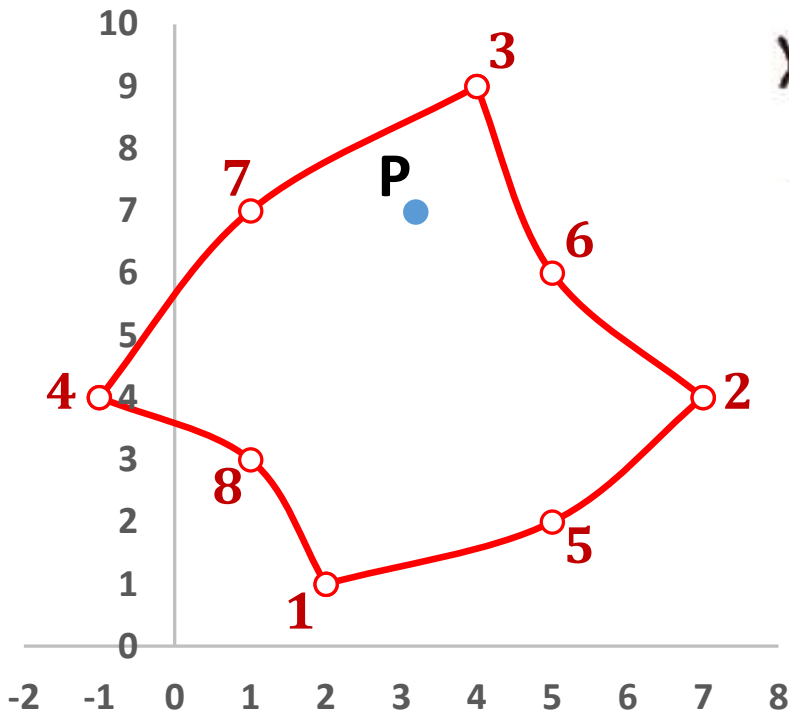
| $i$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ |
|-----|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1   | $\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi+\eta)$    | $\frac{1}{4}(1-\xi)(\xi+2\eta)$      |
| 2   | $\frac{1}{4}(1-\eta)(2\xi-\eta)$    | $\frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi)$      |
| 3   | $\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta)$    | $\frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta)$      |
| 4   | $\frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi-\eta)$    | $\frac{1}{4}(1-\xi)(2\eta-\xi)$      |
| 5   | $-(1-\eta)\xi$                      | $-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$              |
| 6   | $\frac{1}{2}(1-\eta^2)$             | $-(1+\xi)\cdot\eta$                  |
| 7   | $-(1+\eta)\xi$                      | $\frac{1}{2}(1-\xi^2)$               |
| 8   | $-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$            | $-(1-\xi)\cdot\eta$                  |

# Współrzędne punktu P aproksymowane funkcjami kształtu

współrzędne w układzie kartezjańskim:

$$x_p = \underset{4 \times 8}{[N(\xi_p, \eta_p)]} \cdot \underset{8 \times 1}{\{x_i\}_e} = 3.1925 \text{ mm}$$

$$y_p = \underset{4 \times 8}{[N(\xi_p, \eta_p)]} \cdot \underset{8 \times 1}{\{y_i\}_e} = 6.9761 \text{ mm}$$



$$\underset{8 \times 1}{\{x_i\}_e} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \underset{8 \times 1}{\{y_i\}_e} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

## Wyznacznik macierzy Jacobiego dla punktu P

$$\det[J] = \left( \frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\xi} \{x_i\}_e \right)_{1 \times 8} \left( \frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\eta} \{y_i\}_e \right)_{8 \times 1} - \left( \frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\xi} \{y_i\}_e \right)_{1 \times 8} \left( \frac{\partial[N(\xi,\eta)]}{\partial\eta} \{x_i\}_e \right)_{8 \times 1}$$

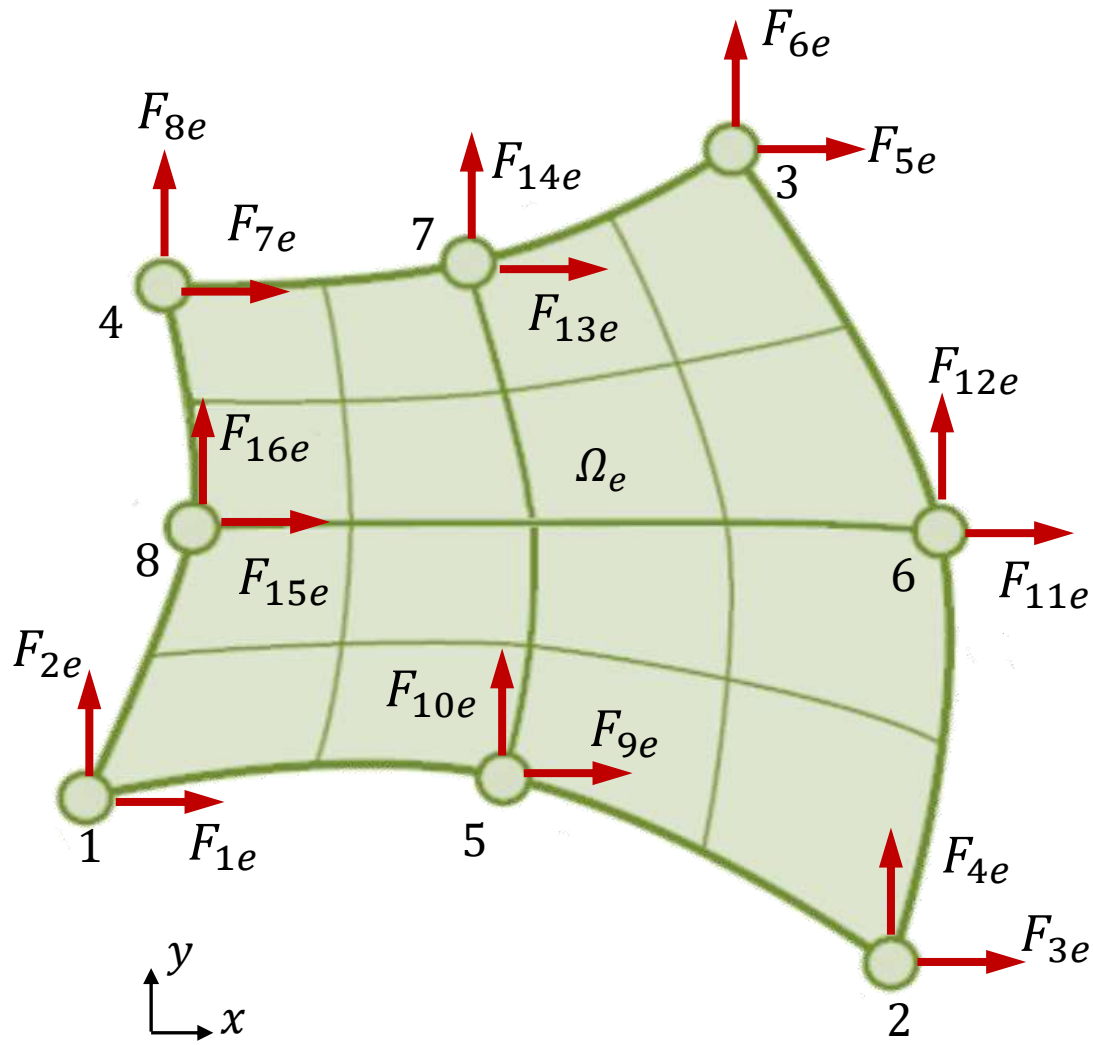
$$\{x_i\}_e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} ; \quad \{y_i\}_e = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

|             |                 |          |          |          |          |          |          |          |
|-------------|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $\xi$       | 0.57735         |          |          |          |          |          |          |          |
| $\eta$      | 0.57735         |          |          |          |          |          |          |          |
|             |                 |          |          |          |          |          |          |          |
| i           | 1               | 2        | 3        | 4        | 5        | 6        | 7        | 8        |
| N           | -0.09623        | -0.16667 | 0.096225 | -0.16667 | 0.140883 | 0.525783 | 0.525783 | 0.140883 |
| dN/d $\xi$  | 0.183013        | 0.061004 | 0.683013 | 0.227671 | -0.24402 | 0.333333 | -0.91068 | -0.33333 |
| dN/d $\eta$ | 0.183013        | 0.227671 | 0.683013 | 0.061004 | -0.33333 | -0.91068 | 0.333333 | -0.24402 |
| det[J]      | <b>9.821367</b> |          |          |          |          |          |          |          |

# Wektor obciążenia zastępczego w elemencie 8-węzłowym

$$[F]_e$$

$$16 \times 1$$



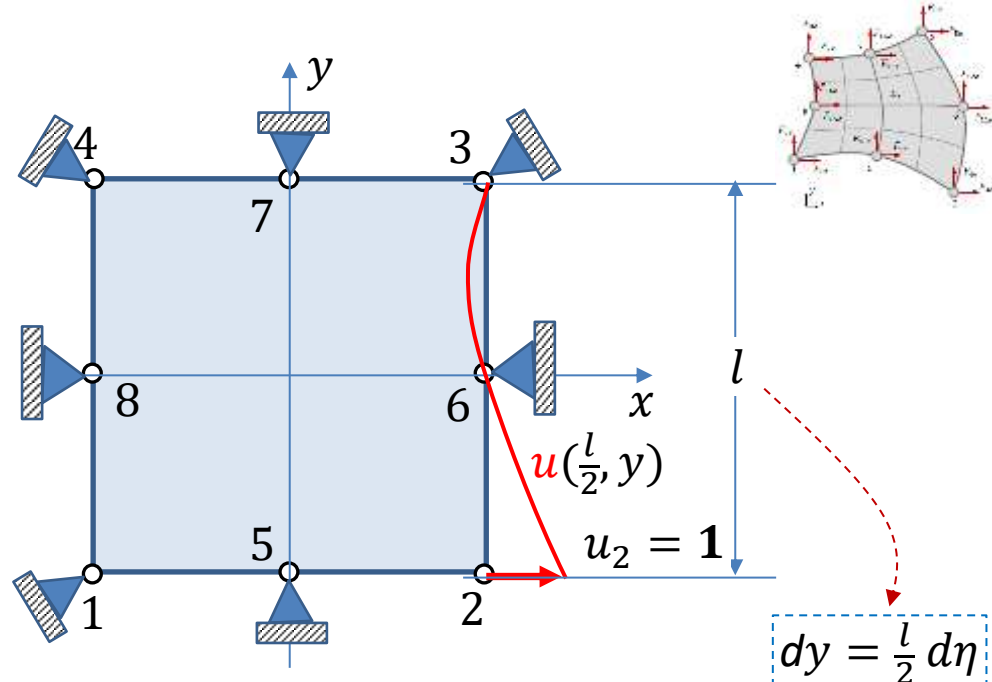
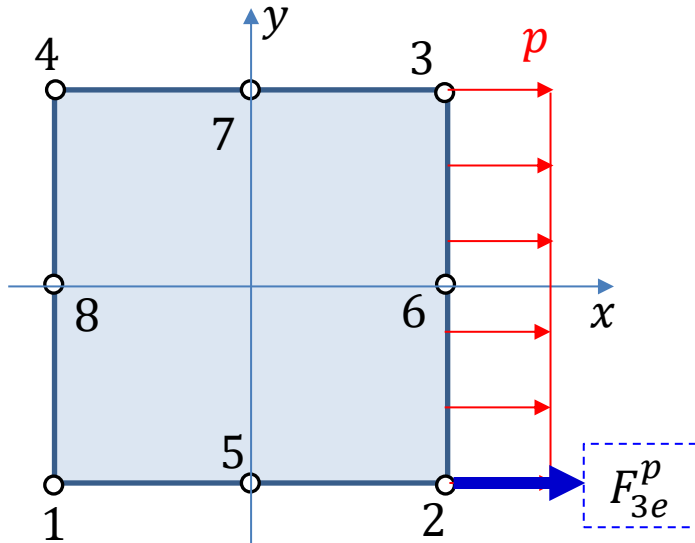
$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{16} \end{Bmatrix}_e$$

➔ Wyznaczenie zastępczych sił w elemencie 8-węzłowym



## Przykład 2 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8-węzłowym od sił powierzchniowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle 2 pochodzącej od stałego wydatku obciążenia  $p$  działającego na krawędzi 2-3



równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e = t_e \int_0^l [p][N] ds$$

Praca siły zastępczej  $F_{3e}^p$  na przemieszczeniu 1

praca obciążenia  $p(x, y)$  na przemieszczeniu  $u(x, y)$

$$F_{3e}^p \cdot 1 = t_e \int_0^l p(x, y) u\left(\frac{l}{2}, y\right) dy$$

$$F_{3e}^p = t_e \int_0^l p N_2 dy$$

$$dy = \frac{l}{2} d\eta$$

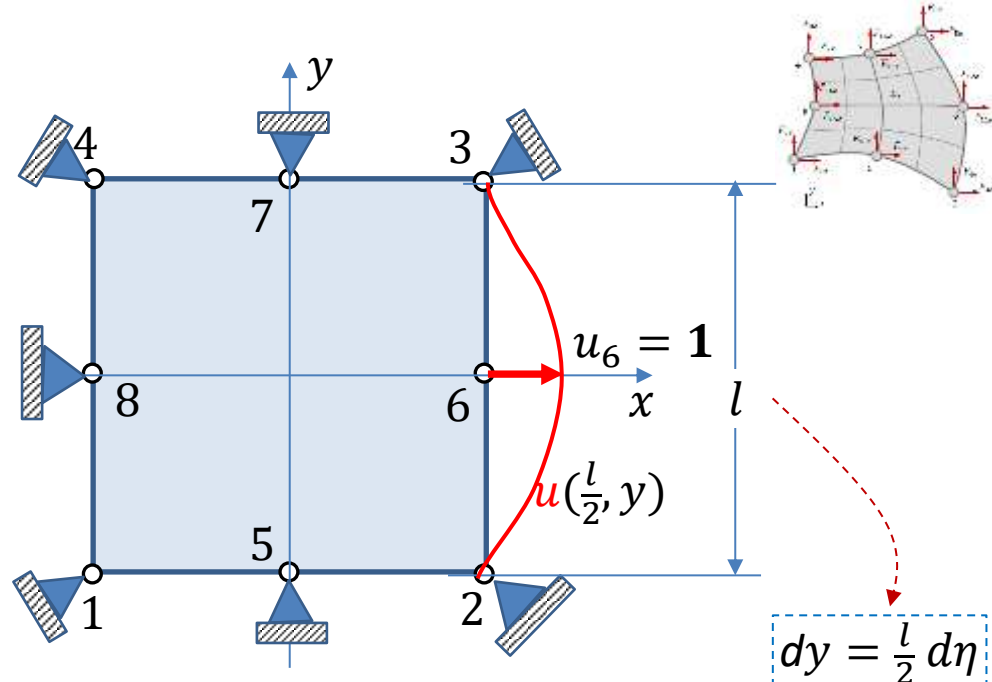
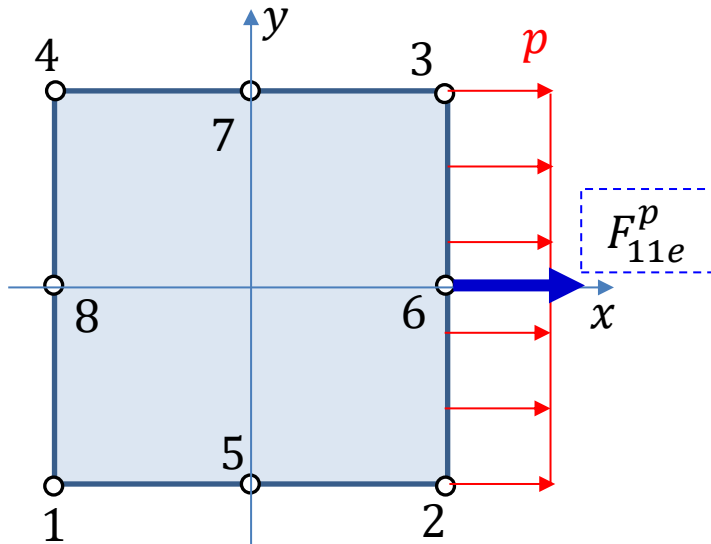
$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)$$

$$N_2(1, \eta) = -\frac{1}{2}(1 - \eta)\eta$$

$$F_{3e}^p = t_e p \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(\eta - 1)\eta \frac{l}{2} d\eta = \frac{pl}{4} t_e \left( \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{pl}{6} t_e$$

## Przykład 2 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8-węzłowym od sił powierzchniowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle 6 pochodzącej od stałego wydatku obciążenia  $p$  działającego na krawędzi 2-3



równoważny wektor obciążenia od obciążenia powierzchniowego:

$$[F^p]_e = t_e \int_0^l [p][N] ds$$

Praca siły zastępczej  $F_{11e}^p$  na przemieszczeniu 1

praca obciążenia  $p(x, y)$  na przemieszczeniu  $u(x, y)$

$$F_{11e}^p \cdot 1 = t_e \int_0^l p(x, y) u(\frac{l}{2}, y) dy$$

$$F_{11e}^p = t_e \int_0^l p N_6 dy$$

$$dy = \frac{l}{2} d\eta$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

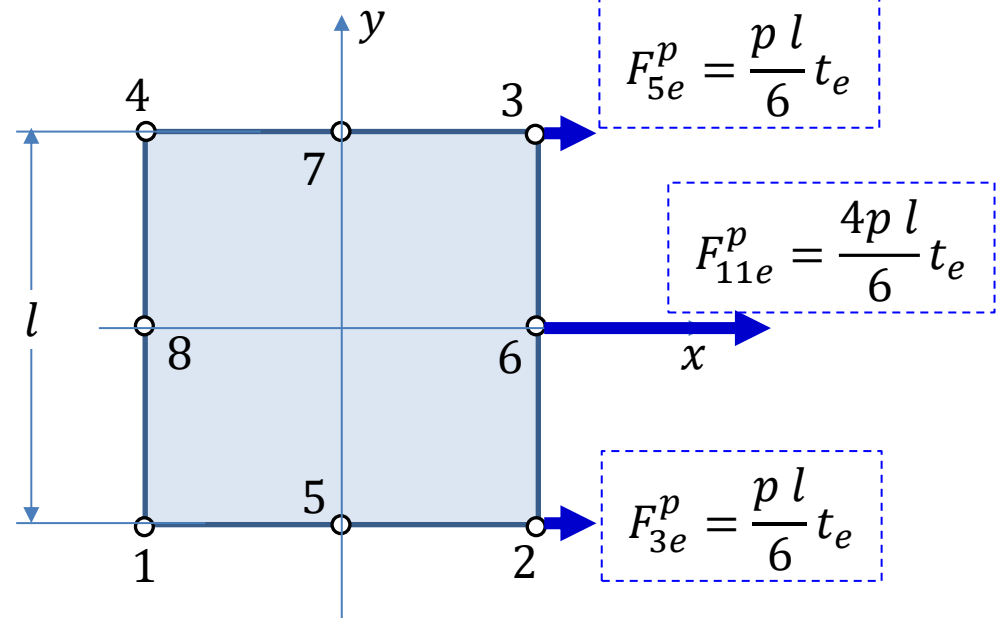
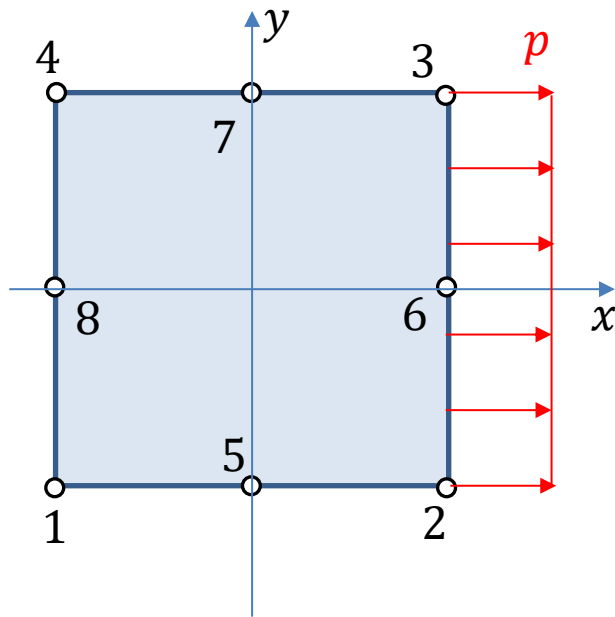
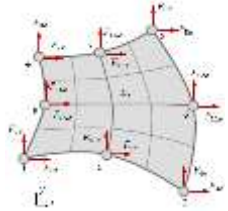
$$N_6(1, \eta) = 1 - \eta^2$$

$$F_{11e}^p = t_e p \int_{-1}^1 (1 - \eta^2) \frac{l}{2} d\eta =$$

$$= \frac{p l}{2} t_e \left( \eta - \frac{1}{3} \eta^3 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2 p l}{3} t_e$$

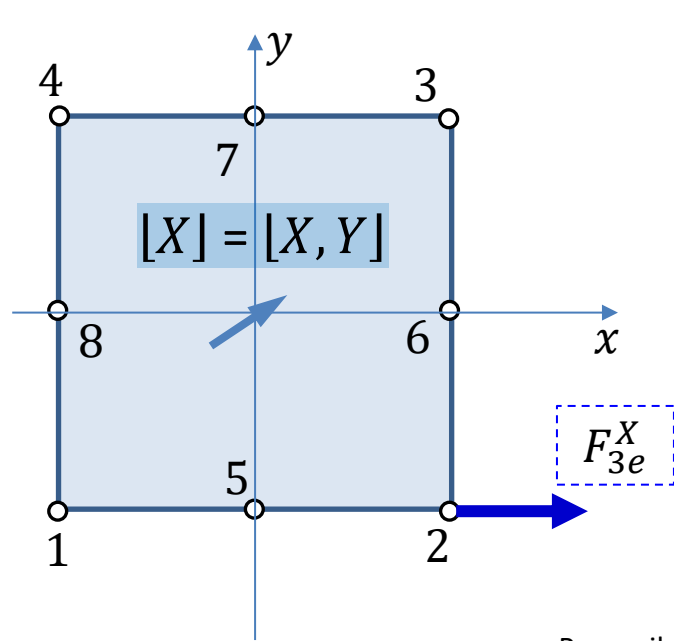
## Przykład 2 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8-węzłowym od sił powierzchniowych

Węzłowe siły zastępcze pochodzącej od stałego wydatku obciążenia  $p$  działającego na krawędzi 2-3



### Przykład 3 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8-węzłowym od sił masowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle 2 pochodzącej od stałego wydatku obciążenia masowego  $X$



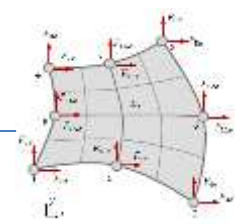
równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$[F^X]_e = t_e \int_{A_e} [X][N] dA_e$$

Praca siły zastępczej  $F_{3e}^X$  na przemieszczeniu 1

pracy obciążenia  $X$  na przemieszczeniu  $u(x, y)$

$$F_{3e}^X \cdot 1 = t_e \int_{A_e} X u(x, y) dA$$



$$\begin{aligned} dy &= \frac{l}{2} d\eta \\ dx &= \frac{l}{2} d\xi \end{aligned}$$

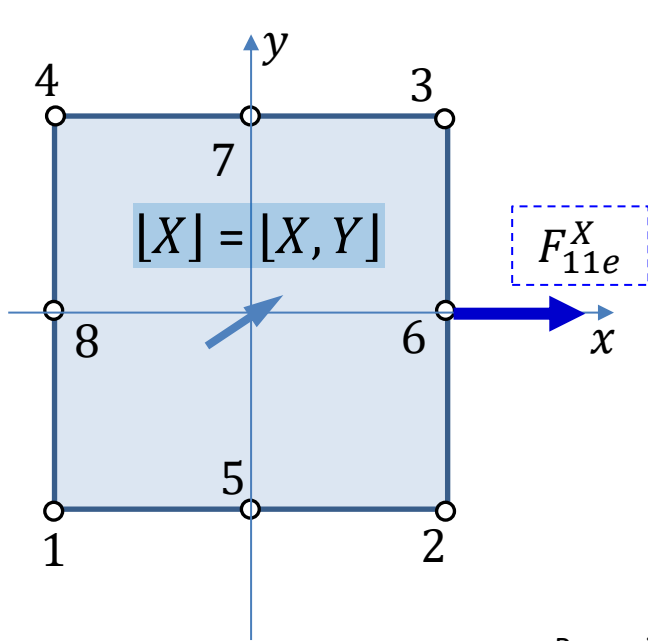
$$F_{3e}^X = t_e \int_{A_e} X N_2 dA$$

$$N_2(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta)$$

$$F_{3e}^X = t_e X \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \xi + \eta) \frac{l}{2} d\xi \frac{l}{2} d\eta = -\frac{1}{12} t_e X l^2$$

### Przykład 3 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8-węzłowym od sił masowych

Poszukamy zastępczej siły w węźle 6 pochodzącej od stałego wydatku obciążenia masowego  $X$

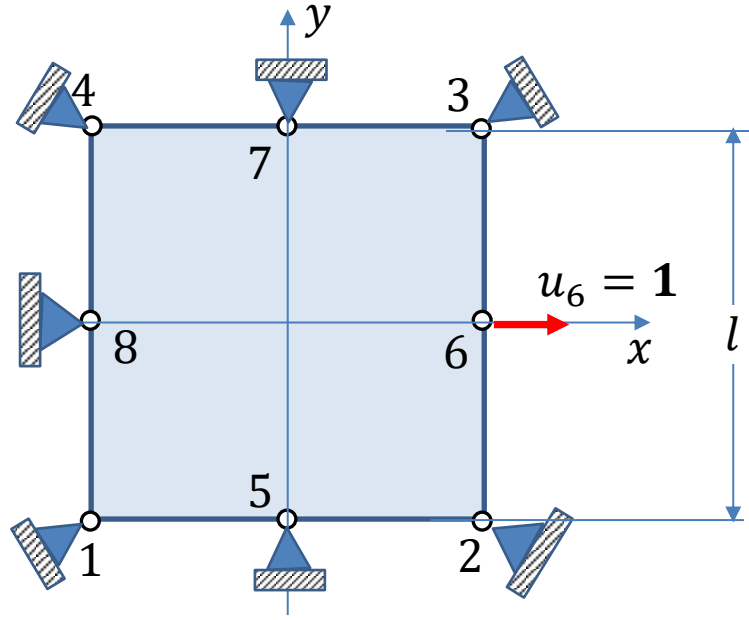


równoważny wektor obciążenia od obciążenia masowego:

$$[F^X]_e = t_e \int_{A_e} [X][N] dA_e$$

$$N_6(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)$$

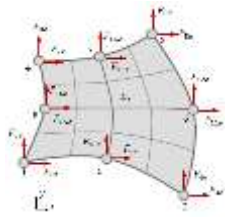
$$F_{11e}^X = t_e X \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \frac{l}{2} d\xi \frac{l}{2} d\eta = \frac{1}{3} t_e X l^2$$



Praca siły zastępczej  $F_{11e}^X$  na przemieszczeniu 1

pracy obciążenia  $X$  na przemieszczeniu  $u(x, y)$

$$F_{11e}^X \cdot 1 = t_e \int_{A_e} X u(x, y) dA$$



$$\begin{aligned} dy &= \frac{l}{2} d\eta \\ dx &= \frac{l}{2} d\xi \end{aligned}$$

$$F_{11e}^X = t_e \int_{A_e} X N_6 dA$$

### Przykład 3 Wyznaczenie zastępczej siły w elemencie 8-węzłowym od sił powierzchniowych

Węzłowe siły zastępcze pochodzącej od stałego wydatku obciążenia masowego  $\mathbf{X} = [X, Y]$

